

02 Reële getallen

CORRECTIESLEUTEL

Inhoud

- Irrationale getallen?
- Getallen
- Intervallen en deelverzamelingen
- Vierkantswortels en derdemachtswortels
- Signaal oefeningen
- Differentiatietraject
- Studiewijzer



WAT JE AL KUNT

- natuurlijke, gehele en rationale getallen herkennen in betekenisvolle situaties
- rekenen met natuurlijke, gehele en rationale getallen
- natuurlijke, gehele en rationale getallen ordenen op een getallenas
- de symbolen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ correct gebruiken
- rekenen met procenten



WAT JE LEERT IN DEZE MODULE

- irrationale getallen herkennen in betekenisvolle situaties
- reële getallen zien als een eindig kommagetal of een oneindig doorlopend kommagetal (decimale vorm)
- bewijzen dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is
- reële getallen ordenen en voorstellen op een getallenas
- de vierkantswortel van een positief reëel getal en de derdemachtswortel van een reëel getal berekenen
- het schetsen van de grootteorde van een vierkantswortel van een positief reëel getal en de derdemachtswortel van een reëel getal en met ICT een rationale benadering bepalen

- de vierkantswortel van een positief reëel getal en de derdemachtswortel van een reëel getal benaderen met behulp van een rekenmachine
- procenten omzetten in een breuk en de decimale notatie



IN DE KIJKER

Je kunt getallen op een correcte manier afronden, benaderen en schatten.



WISKUNDETAAL

- decimaal getal
- eindig decimale vorm
- oneindig doorlopende decimale vorm
- zuiver repeterende decimale vorm
- gemengd repeterende decimale vorm
- niet-repeterende decimale vorm
- periode
- niet-repeterend deel
- irrationaal getal
- reëel getal
- $\mathbb{R}$
- vierkantswortel
- derdemachtswortel
- $\approx$



Instap

Opdracht 1

a) Vul aan.

$\mathbb{N}$ is de verzameling van de natuurlijke getallen.

$\mathbb{Z}$ is de verzameling van de gehele getallen.

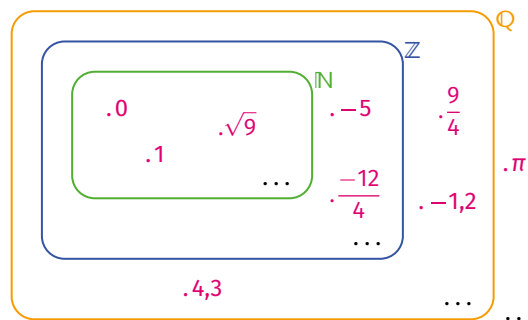
$\mathbb{Q}$ is de verzameling van de rationale getallen.

b) Plaats de volgende getallen in het diagram.

-5 ; $\frac{9}{4}$; 0 ; $-1,2$; π ; $-\frac{12}{4}$; $\sqrt{9}$; 1 ; $4,3$

c) Vul aan met $\in$ of $\notin$.

$-\frac{12}{4}$	$\notin$	$\mathbb{N}$	0	$\in$	$\mathbb{Z}$
$-\frac{12}{4}$	$\in$	$\mathbb{Z}$	-5	$\in$	$\mathbb{Q}$
$-\frac{12}{4}$	$\in$	$\mathbb{Q}$	$4,3$	$\notin$	$\mathbb{N}$



TIP



$-3 \in \mathbb{Z}$

Dit lees je als

'-3 is een geheel getal'.

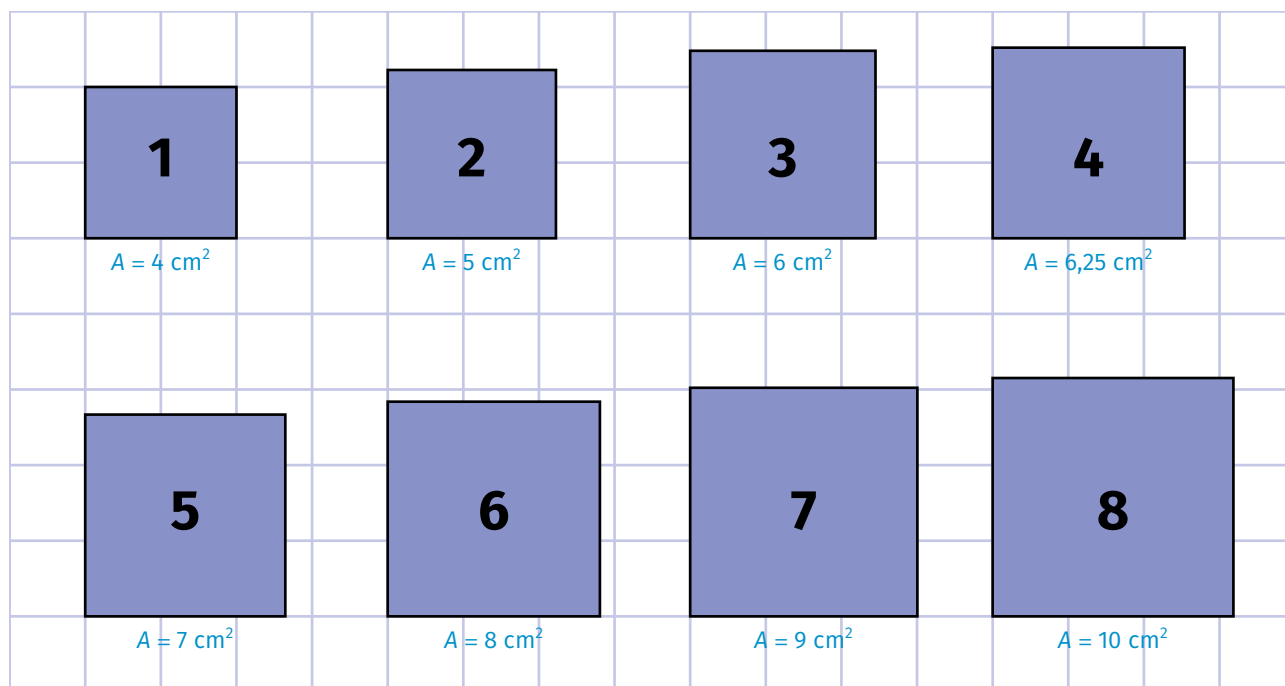
$1,5 \notin \mathbb{N}$

Dit lees je als

'1,5 is geen natuurlijk getal'.

Opdracht 2

Acht vierkanten werden getekend op ruitjespapier.



De oppervlakte van een vierkant kun je berekenen met de formule $A = z^2$.

- a) Hoe lang is de zijde van het eerste vierkant? **2 cm**
- b) Van welk ander vierkant kun je zonder rekenmachine onmiddellijk de lengte van de zijde bepalen?

Het 7e vierkant

- c) Hoe lang is de zijde van dit vierkant? **3 cm**

De maatgetallen van deze lengtes zijn **natuurlijke getallen**.

- d) Schat de lengte van de zijde van het vierde vierkant. **2,5 cm**

- e) Bereken de lengte van de zijde van het vierde vierkant.

$$\begin{aligned} A &= z^2 \\ 6,25 \text{ cm}^2 &= z^2 \\ \sqrt{6,25 \text{ cm}^2} &= z \\ 2,5 \text{ cm} &= z \end{aligned}$$

- f) Schrijf indien mogelijk het maatgetal van deze lengte als een breuk.

$$\frac{5}{2}$$

Het maatgetal van deze lengte is een **rationaal getal**.

- g) Vul in de tabel de gegevens van het eerste, vierde en zevende vierkant.

- h) Schat de lengtes van de zijden van de andere vierkanten.

- i) Bereken de lengte van de zijden van de overgebleven vierkanten.

De maatgetallen van de lengtes van het tweede, derde, vijfde, zesde en achtste vierkant

kunnen niet als een breuk geschreven worden. Het zijn **geen rationale getallen**!

VIERKANT	OPPERVLAKTE	SCHATTING	LENGTE VAN DE ZIJDE OP 0,001 CM NAUWKEURIG
1	$A = 4 \text{ cm}^2$		2,000 cm
2	$A = 5 \text{ cm}^2$	2,2 cm	2,236 cm
3	$A = 6 \text{ cm}^2$	2,4 cm	2,449 cm
4	$A = 6,25 \text{ cm}^2$	2,5 cm	2,500 cm
5	$A = 7 \text{ cm}^2$	2,7 cm	2,646 cm
6	$A = 8 \text{ cm}^2$	2,9 cm	2,828 cm
7	$A = 9 \text{ cm}^2$		3,000 cm
8	$A = 10 \text{ cm}^2$	3,2 cm	3,162 cm

1 Wat zijn irrationale getallen?

De rationale getallen zijn alle getallen die je als breuk kunt schrijven. Bestaan er nog andere getallen?

1.1 Decimale vormen

Een decimale vorm is een kommagetal. Het aantal cijfers na de komma kan **eindig** of **oneindig doorlopend** zijn. Je kan de decimale vorm van een rationaal getal (als breuk genoteerd) bepalen met behulp van ICT of door het uitvoeren van een deling.

A) Eindig decimale vormen

Eindig decimale vormen zijn decimale vormen waarbij het aantal cijfers na de komma eindig is.

Er bestaan rationale getallen waarbij in de decimale vorm het aantal cijfers na de komma eindig is.

Voorbeelden

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{-9}{8} = -1,125$$

$$\frac{-13}{2} = -6,5$$

$$\frac{21}{5} = 4,2$$

Eindig decimale vormen noemen we ook **decimale getallen**.



— Merk op —

Je kunt een eindig decimale vorm omzetten naar een breuk waarbij de noemer een macht van 10 is. Daarna kun je de breuk vereenvoudigen. Je kan hier ook ICT voor gebruiken. In het differentiatietraject vind je een oefening op het toepassen van dit algoritme.

B) Oneindig doorlopende decimale vormen met een repeterend deel

Oneindig doorlopende decimale vormen met een repeterend deel zijn decimale vormen waarbij een groepje cijfers na de komma herhaald wordt en het aantal cijfers na de komma oneindig is.

Er bestaan ook rationale getallen waarbij in de decimale vorm het aantal cijfers na de komma oneindig doorloopt.

Voorbeelden

$$\frac{5}{3} = 1,666...$$

$$\frac{-37}{99} = -0,373737...$$

Bij deze voorbeelden wordt een groepje cijfers onmiddellijk na de komma herhaald. Dit zijn **zuiver repeterende decimale vormen**.

Het groepje cijfers dat herhaald wordt noemen we de **periode**. We spreken af dat we de periode drie keer noteren, gevolgd door "...". De drie puntjes geven aan dat het aantal cijfers na de komma oneindig doorloopt.

Voorbeelden

$$\frac{17}{6} = 2,8333...$$

$$\frac{-1099}{1980} = -0,55505050...$$

Bij deze voorbeelden start de herhaling van een groepje cijfers niet onmiddellijk na de komma.

Dit zijn **gemengd repeterende decimale vormen**.

We zien dat er eerst een niet-repeterend deel is dat daarna gevolgd wordt door het repeterende deel (de periode). Ook hier wordt de periode drie keer herhaald en duiden de drie puntjes op het feit dat het aantal cijfers na de komma oneindig doorloopt.



— Merk op —

- De getallen 0,888 en 0,888... zijn twee verschillende rationale getallen, namelijk $\frac{111}{125}$ en $\frac{8}{9}$.
 $0,888 \neq 0,888\ldots$
- Op een rekenmachine is het aantal cijfers na de komma beperkt.
Als je met een rekenmachine de breuk $\frac{8}{9}$ omzet in zijn decimale vorm, toont de rekenmachine een afgerond resultaat 0,888888888889. Er wordt eigenlijk 0,88888888888... bedoeld.
- Bij een eindresultaat van een berekening wordt er vaak afgerond. Het is belangrijk dat je hier de juiste symbolen gebruikt.
 $\frac{8}{9} = 0,888\ldots$ (Het resultaat werd niet afgerond, je gebruikt “=”.)
 $\frac{8}{9} \approx 0,889$ (Het resultaat werd afgerond op 0,001 nauwkeurig, je gebruikt “≈”.)
- Je kunt een oneindig decimale vorm met een repeterend deel omzetten naar een breuk. Daarna kun je de breuk vereenvoudigen. Je kan hier ook ICT voor gebruiken. In het differentiatietraject vind je een oefening op het toepassen van dit algoritme.

C) Oneindig doorlopende decimale vormen zonder repeterend deel

Oneindig doorlopende decimale vormen **zonder** een repeterend deel zijn decimale vormen waarbij er geen (groepje) cijfers na de komma herhaald wordt, maar waarbij het aantal cijfers na de komma wel oneindig doorloopt.

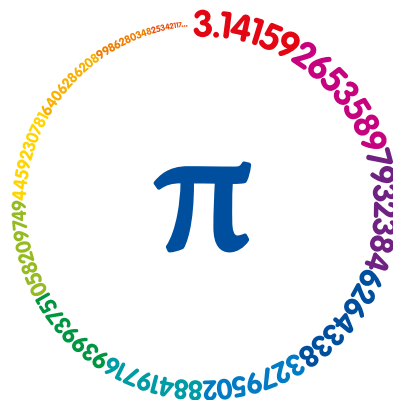
Er bestaan geen rationale getallen met een oneindig doorlopende decimale vorm zonder repeterend deel. Toch bestaan deze decimale vormen.

Voorbeelden

$$\pi = 3,141592653\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$$

definitie Een **irrationaal getal** is een oneindig doorlopende decimale vorm zonder repeterend deel.





1.2 $\sqrt{2}$ is een irrationaal getal

$$\sqrt{2} = 1,414213562...$$

We vinden in de decimale vorm geen periode. We hebben het vermoeden dat $\sqrt{2}$ niet als breuk kan geschreven worden.

stelling $\sqrt{2}$ is een irrationaal getal.

Om deze stelling te bewijzen zullen we ervan uitgaan dat hetgeen we willen bewijzen niet waar is. In onze redenering zullen we botsen op een tegenstrijdigheid. Hieruit concluderen we dat wat we wilden bewijzen wel waar is. Zo een bewijs noemen we een bewijs uit het ongerijmde.

Bewijs uit het ongerijmde: veronderstel dat $\sqrt{2}$ wel een rationaal getal is.

STAP 1: Je kan $\sqrt{2}$ schrijven als een onvereenvoudigbare breuk.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{met } b \neq 0 \text{ en } \text{ggd}(a, b) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Downarrow$$

$$2b^2 = a^2 \quad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 \text{ is even}$$

Als a oneven is, dan is $a = 2k + 1$ met $k \in \mathbb{N}$

dus $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$ is ook oneven.

$$\Downarrow$$

$$a \text{ is even}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{N}: a = 2x \quad (2)$$

STAP 2: We vervangen (2) in (1).

$$2b^2 = a^2$$

$$\Downarrow$$

$$2b^2 = (2x)^2$$

$$\Downarrow$$

$$2b^2 = 4x^2$$

$$\Downarrow$$

$$b^2 = 2x^2$$

$$\Downarrow$$

$$b^2 \text{ is even}$$

$$\Downarrow$$

$$b \text{ is even}$$



$\exists$ lees je als 'er bestaat'.

$\exists x \in \mathbb{N}$ lees je als 'er bestaat een getal x , dat element is van de verzameling van de natuurlijke getallen'.

Vaststelling: zowel a als b is deelbaar door 2.

Dit is strijdig met onze veronderstelling bij de start, namelijk $\text{ggd}(a, b) = 1$.

Je kan $\sqrt{2}$ niet als een onvereenvoudige breuk schrijven.

$\sqrt{2}$ is irrationaal.

1.3 Verband tussen breuk, decimale vorm en procent

In het dagelijks leven kom je heel vaak in contact met procenten. Denk maar aan de solden, kortingsbonnen... Procenten kun je ook omzetten naar breuken of decimale vormen en omgekeerd.

Voorbeeld

Een programma is aan het laden. Op de onderstaande figuren zie je telkens hoe ver dit gevorderd is. Je kunt een schatting maken van hoe ver het downloaden staat. Op basis van je schatting kun je berekenen hoeveel procent er ongeveer geladen is.



$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$$



$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0,333... = 33,333... \%$$



$$\frac{5}{12} = 0,41666... = 41,666... \%$$



— Merk op —

Om een breuk om te vormen naar procent, maak je gebruik van de decimale vorm.



Verwerkingsopdrachten



1

Zet de breuken om naar hun decimale vorm.
Plaats een kruisje bij de juiste benaming.

- a) $\frac{1}{4} = 0,25$
- b) $\frac{91}{27} = 3,370370370...$
- c) $\frac{14}{15} = 0,9333...$
- d) $\frac{-13}{18} = -0,7222...$
- e) $\frac{29}{22} = 1,3181818...$
- f) $\frac{8}{40} = 0,2$
- g) $\frac{36}{11} = 3,272727...$
- h) $\frac{-481}{99} = -4,858585...$

DECIMALE VORMEN		
EINDIG	ONEINDIG DOORLOPEND	
decimaal getal	zuiver repeterend	gemengd repeterend
a) X		
b)	X	
c)		X
d)		X
e)		X
f) X		
g)	X	
h)	X	

2

Omkring de irrationale getallen.

a) $0,151515\dots$

d) $-2,78293821\dots$

g) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

j) $2,666$

m) $0,010010001\dots$

b) $\sqrt{49}$

e) $5,888\dots$

h) $\frac{-9}{5}$

k) $-9,061061061\dots$

n) $\sqrt{\frac{9}{4}}$

c) $-3,47$

f) $\sqrt{3}$

i) $-4,56333\dots$

l) $\frac{\pi}{2}$

o) $5,3111\dots$

3

Voor de start van je nieuwe studies wil je een nieuwe 13-inch MacBook Air kopen. Hiervoor betaal je normaal gezien € 1129,00. Met je nieuwe studentenkaart krijg je in deze winkel 8 % korting.

a) Hoeveel procent van je MacBook Air moet je nog betalen?

92 %

b) Zet het percentage uit a om naar de decimale vorm.

$$92 \% = \frac{92}{100} = 0,92$$

c) Schat en bereken nu met behulp van het antwoord uit b, hoeveel je nog moet betalen.

Schatting:

1029 euro

Berekening:

$$0,92 \cdot 1129,00 = 1038,68$$

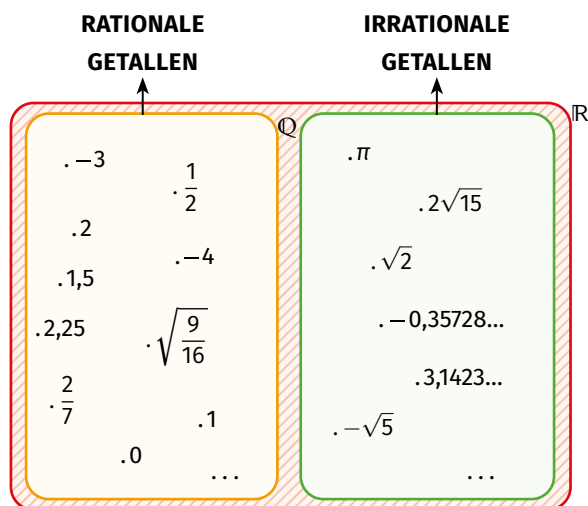
Antwoord: Voor de nieuwe MacBook Air betaal je nog 1038,68 euro.

2 Reële getallen

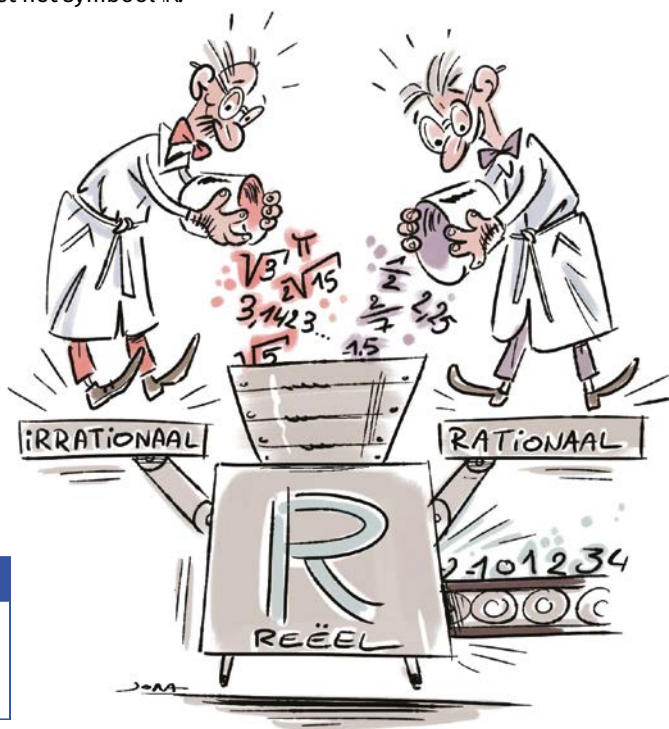
2.1 De verzameling van de reële getallen

definitie Een **reëel getal** is ofwel een rationaal getal ofwel een irrationaal getal.

De verzameling van de reële getallen stellen we voor met het symbool $\mathbb{R}$.



SYMBOOL	OMSCHRIJVING
$\mathbb{Q}$	de verzameling van de rationale getallen
$\mathbb{R}$	de verzameling van de reële getallen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	de verzameling van de irrationale getallen



— Merk op —

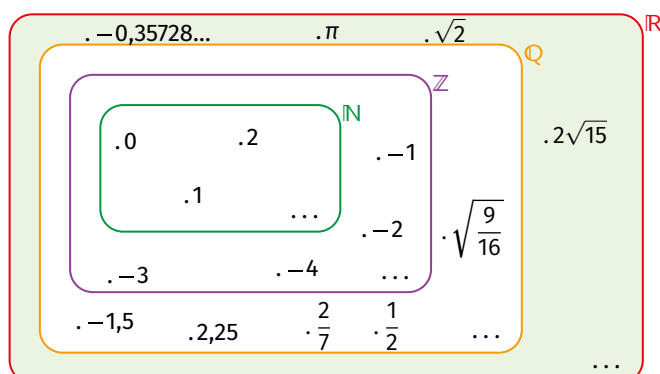
Sommige wortelvormen zijn rationale getallen, sommige wortelvormen zijn irrationale getallen.

Samengevat:

DECIMALE VORMEN			
EINDIG	ONEINDIG DOORLOPEND		
decimale getallen	zuiver repeterend	gemengd repeterend	niet-repeterend
rationale getallen			irrationale getallen
reële getallen			

Je kunt de natuurlijke getallen, gehele getallen, rationale getallen en reële getallen in één diagram plaatsen.

De irrationale getallen bevinden zich in de zone die ingekleurd is.

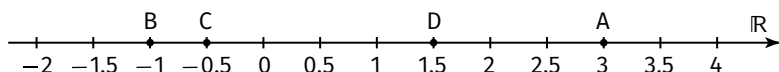


2.2 Reële getallen op de getallenas

Je leerde al rationale getallen op de getallenas plaatsen.

Het getal dat overeenkomt met een punt op de getallenas noemen we de **abscis**.

We kunnen van de punten A, B, C en D de abscis eenvoudig aflezen.

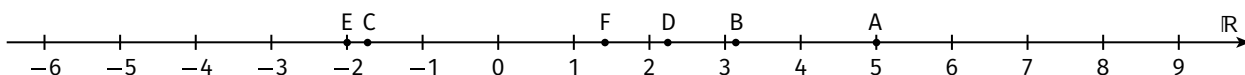


LETTER	ABSCIS
A	3
B	-1
C	$\frac{-1}{2} = -0,5$
D	$\frac{3}{2} = 1,5$

Ook reële getallen hebben een plaats op de getallenas. Met elk punt komt er één reëel getal overeen. We noemen dit de abscis.

Om reële getallen op de getallenas te plaatsen kun je gebruikmaken van hun (afgeronde) decimale vorm.

Zo kun je ze bij benadering een plaats geven op de getallenas.



ABSCIS	LETTER
$\sqrt{25} = 5$	A
$\pi \approx 3,14$	B
$-\sqrt{3} \approx -1,73$	C

ABSCIS	LETTER
$\sqrt{5} \approx 2,24$	D
$-\sqrt{4} = -2$	E
$\sqrt{2} \approx 1,41$	F



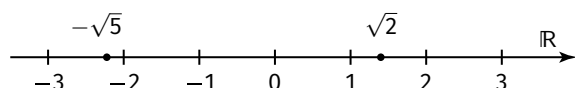
— Merk op —

- Je kunt de plaats van een irrationaal getal ook **construeren** op de getallenas. Je leert dit in een andere module, wanneer je de stelling van Pythagoras kent.
- In het differentiatietraject kun je je in nog een andere methode verdiepen. We tonen hoe je π kunt construeren op de getallenas.

Elk reëel getal is de abscis van een punt op de getallenas. Omgekeerd hoort er bij elk punt van de getallenas juist één reële abscis.

2.3 Reële getallen ordenen

De reële getallen $-\sqrt{5}$ en $\sqrt{2}$ werden op de reële getallenas geplaatst.



We stellen vast dat $\sqrt{2}$ groter is dan $-\sqrt{5}$.

IN SYMBOLEN: $\sqrt{2} > -\sqrt{5}$

We stellen ook vast dat $\sqrt{2}$ ligt tussen 1 en 2.

IN SYMBOLEN: $1 < \sqrt{2} < 2$

SYMBOOL	BETEKENIS
$<$	... is kleiner dan ...
$\leq$	... is kleiner dan of gelijk aan ...
$>$	... is groter dan ...
$\geq$	... is groter dan of gelijk aan ...

Op de reële getallenas hieronder werden de volgende reële getallen geplaatst:

$$\sqrt{2} = 1,41421\dots$$

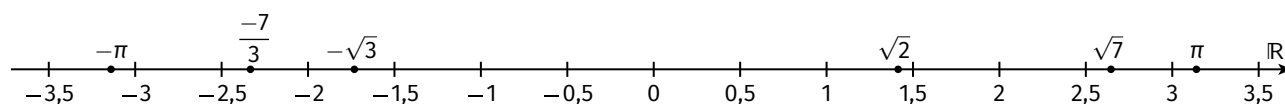
$$-\sqrt{3} = -1,73205\dots$$

$$\sqrt{7} = 2,64575\dots$$

$$\frac{-7}{3} = -2,33333\dots$$

$$\pi = 3,14159\dots$$

$$-\pi = -3,14159\dots$$



Als we de orde tussen drie reële getallen bekijken kunnen we bijvoorbeeld volgende vaststellingen noteren:

$$\sqrt{2} < \sqrt{7} \quad \wedge \quad \sqrt{7} < \pi \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} < \pi$$

$$-\pi < \frac{-7}{3} \quad \wedge \quad \frac{-7}{3} < -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad -\pi < -\sqrt{3}$$

$$-\pi < \sqrt{2} \quad \wedge \quad \sqrt{2} < \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad -\pi < \sqrt{7}$$

eigenschap

IN WOORDEN

Als een eerste reëel getal kleiner is dan een tweede reëel getal en dat tweede getal is kleiner dan een derde reëel getal, dan is het eerste reëel getal kleiner dan het derde reëel getal.

IN SYMBOLEN

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x < y \quad \wedge \quad y < z \quad \Rightarrow \quad x < z$$



Verwerkingsopdrachten



2,3

4

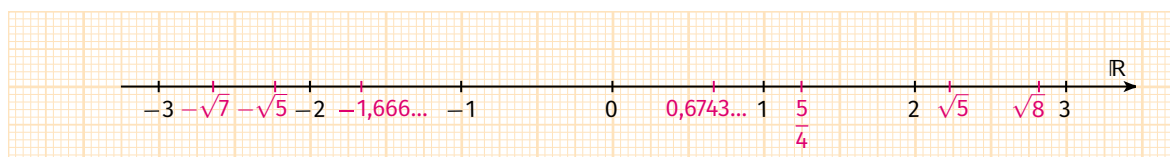
Vul aan met $>$, $<$ of $=$.

- a) $\sqrt{17}$ $<$ $\sqrt{19}$ c) $\sqrt{8}$ $=$ $2\sqrt{2}$ e) $\sqrt{\frac{35}{5}}$ $>$ $\sqrt{6}$
b) $-\sqrt{10}$ $<$ $-\pi$ d) $0,666$ $<$ $\frac{2}{3}$ f) π $>$ $\sqrt{\frac{40}{3}} - \sqrt{12}$

5

Plaats de volgende getallen op de getallenas. Maak indien nodig gebruik van de decimale vorm.

$\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{8}$; $-\sqrt{7}$; $\frac{5}{4}$; $0,6743\dots$; $-1,666\dots$



6

Schrijf in symbolen.

- a) $\sqrt{5}$ is groter dan 2,2. $\sqrt{5} > 2,2$
b) $-\sqrt{10}$ ligt tussen $-3,2$ en $-3,1$. $-3,2 < -\sqrt{10} < -3,1$
c) π ligt tussen 3,14 en $\frac{22}{7}$. $3,14 < \pi < \frac{22}{7}$

3 Intervallen en deelverzamelingen

3.1 Intervallen

Soms is het zinvol om maar een deel van de verzameling van de reële getallen te gebruiken. In zo'n geval maak je gebruik van intervallen.

Voorbeeld

$[-3, 7[$



De ondergrens van dit interval is -3 . Het vierkante haakje is **gesloten**.

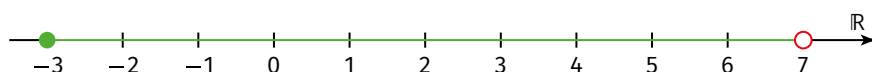
-3 behoort tot het interval.

De bovengrens van dit interval is 7 . Het vierkante haakje is **open**.

7 behoort niet tot het interval.

Alle reële getallen die groter of gelijk zijn aan -3 , maar kleiner dan 7 .

IN SYMBOLEN: $-3 \leq x < 7$



AFSPRAAK



We spreken af dat als het getal erbij hoort, we dit op de getallenas aanduiden met een **groen gevuld bolletje**. Hoort het getal er niet bij, dan duiden we het aan met een **rood open cirkeltje**. Alle getallen tussen de twee grenswaarden duiden we in het groen aan. We krijgen dus een groen lijnstukje.

Voorbeelden

BETEKENIS	NOTATIE MET ONGELIJKHEDEN	INTERVALNOTATIE	OP DE GETALLENAS
Alle reële getallen tussen -2 en 5	$-2 < x < 5$	$] -2, 5[$	
Alle reële getallen die groter zijn dan -5 en kleiner of gelijk zijn aan 7	$-5 < x \leq 7$	$] -5, 7]$	

Een interval kan ook onbegrensd zijn. Dit wil zeggen dat we geen grootste (of kleinste) grens bereiken. We gebruiken in de intervalnotatie: $-\infty$ (min oneindig) of $+\infty$ (plus oneindig).

Voorbeelden

BETEKENIS	NOTATIE MET ONGELIJKHEDEN	INTERVALNOTATIE	OP DE GETALLENAS
Alle getallen groter dan $\sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$	$] \sqrt{2}, +\infty[$	
Alle getallen kleiner dan of gelijk aan π	$x \leq \pi$	$] -\infty, \pi]$	



— Merk op —

- $+\infty$ en $-\infty$ zijn geen reële getallen. Ze kunnen dus nooit tot het interval behoren (open haakje).
- De verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$ noteert men soms als het interval $] -\infty, +\infty[$. We kunnen nog andere deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ noteren met de intervalnotatie.

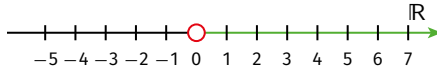
3.2 Bijzondere deelverzamelingen

Soms wil je alleen gebruikmaken van alle positieve of alle negatieve reële getallen. Hiervoor bestaan specifieke symbolen.

notatie $\mathbb{R}^+$ de verzameling van de positieve reële getallen

BETEKENIS	NOTATIE MET ONGELIJKHEDEN	NOTATIE MET INTERVAL / DEELVERZAMELING	OP DE GETALLENAS
Alle positieve reële getallen	$x \geq 0$	$x \in \mathbb{R}^+$ of $x \in [0, +\infty[$	

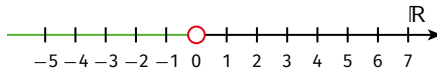
notatie $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ de verzameling van de **strikt** positieve reële getallen
(of de verzameling van de positieve reële getallen zonder 0)

BETEKENIS	NOTATIE MET ONGELIJKHEDEN	NOTATIE MET INTERVAL / DEELVERZAMELING	OP DE GETALLENAS
Alle strikt positieve reële getallen	$x > 0$	$x \in \mathbb{R}_0^+$ of $x \in]0, +\infty[$	

notatie $\mathbb{R}^-$ de verzameling van de negatieve reële getallen

BETEKENIS	NOTATIE MET ONGELIJKHEDEN	NOTATIE MET INTERVAL / DEELVERZAMELING	OP DE GETALLENAS
Alle negatieve reële getallen	$x \leq 0$	$x \in \mathbb{R}^-$ of $x \in]-\infty, 0]$	

notatie $\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$ de verzameling van de **strikt** negatieve reële getallen
(of de verzameling van de negatieve reële getallen zonder 0)

BETEKENIS	NOTATIE MET ONGELIJKHEDEN	NOTATIE MET INTERVAL / DEELVERZAMELING	OP DE GETALLENAS
Alle strikt negatieve reële getallen	$x < 0$	$x \in \mathbb{R}_0^-$ of $x \in]-\infty, 0[$	



Verwerkingsopdrachten



7

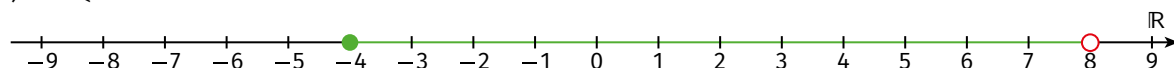
Kleur de vakken die dezelfde deelverzameling van $\mathbb{R}$ voorstellen in eenzelfde kleur.

	$x > -6$
$-1,5 < x < 5$	
$] -\infty; 3,5]$	$[-2,5; 4[$
$] -1,5; 5[$	
	$] -6, +\infty[$
$-2,5 \leq x < 4$	$x \leq 3,5$

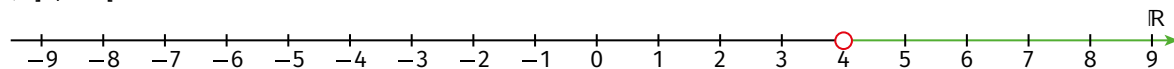
8

Stel de volgende intervallen of ongelijkheden voor op de getallenas.

a) $-4 \leq x < 8$



b) $]4, +\infty[$



9

Noteer onderstaande omschrijvingen als een interval.

a) Alle reële getallen tussen $-\sqrt{2}$ en $\sqrt{6}$.

$$]-\sqrt{2}, \sqrt{6}[$$

b) Alle reële getallen die groter dan of gelijk zijn aan 3 en kleiner dan of gelijk zijn aan $\sqrt{65}$.

$$[3, \sqrt{65}]$$

c) Alle reële getallen die kleiner zijn dan $\frac{5}{8}$.

$$]-\infty, \frac{5}{8}[$$

10

Noteer deze zinnen met behulp van ongelijkheden.

a) Alle reële getallen die groter dan of gelijk zijn aan -5 en kleiner dan of gelijk zijn aan -1 .

$$-5 \leq x \leq -1$$

b) Alle reële getallen die groter zijn dan 5.

$$x > 5$$

4 Vierkantswortels en derdemachtswortels

4.1 Vierkantswortel van een positief reëel getal

Als we de waarde van x willen berekenen in deze evenredigheid stellen we vast dat er twee oplossingen zijn.

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$$

Er zijn twee reële getallen waarvan het kwadraat 36 is: namelijk 6 en -6 .

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} \text{ of } x = -\sqrt{36}$$

$\sqrt{36}$ is de **positieve vierkantswortel** uit 36.

$-\sqrt{36}$ is de **negatieve vierkantswortel** uit 36.

$$x = 6 \text{ of } x = -6$$

definitie b is een **vierkantswortel** van een positief reëel getal a **als en slechts als** het kwadraat van b gelijk is aan a .



— Merk op —

- Je kunt van elk strikt positief reëel getal een positieve vierkantswortel en een negatieve vierkantswortel bepalen. Als men spreekt over de vierkantswortel van een positief reëel getal, bedoelt men de positieve vierkantswortel van dat getal.
- De positieve en negatieve vierkantswortel van 0 is gelijk aan 0.
 $\sqrt{0} = 0 = -\sqrt{0}$
- We kunnen geen vierkantswortel trekken van een strikt negatief reëel getal. Bijvoorbeeld: we kunnen geen reële x -waarde vinden zodat $x^2 = -9$.
- $\sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$

$$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

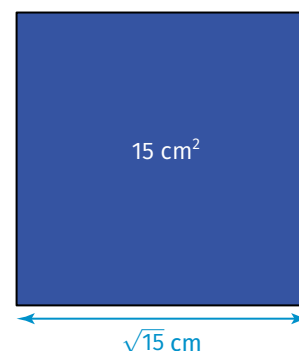
$$\text{Algemeen: } \sqrt{a^2} = |a|$$

- Bij vraagstukken zal je soms jouw eindresultaat moeten afronden op een bepaalde nauwkeurigheid. Zo is de lengte van de zijde van dit vierkant exact $\sqrt{15}$ cm. Het eindresultaat kunnen we afronden.

$$\sqrt{15} = 3,872983... \approx 3,87$$

We formuleren:

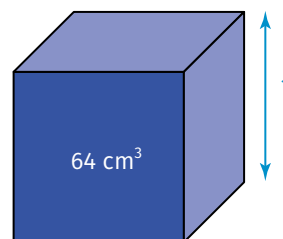
De lengte van de zijde van het gegeven vierkant is ongeveer 3,87 cm.



4.2 Derdemachtswortel van een reëel getal

Gegeven: een kubus met een volume $V = 64 \text{ cm}^3$
Gevraagd: Hoe lang is de zijde van deze kubus?

Oplossing: $V = 64 \text{ cm}^3$
 $z^3 = 64 \text{ cm}^3$
 $z = \sqrt[3]{64 \text{ cm}^3}$
 $z = 4 \text{ cm}$



Om terug te keren naar de lengte van de zijde van de kubus keren we eigenlijk de machtsverheffing om. We berekenen de derdemachtswortel van een reëel getal.

definitie b is de **derdemachtswortel** van een reëel getal a als en slechts als de derde macht van b gelijk is aan a .

Het symbool $\sqrt[3]{\dots}$ lezen we als 'de derdemachtswortel van ...'.

Voorbeelden

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ want } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \text{ want } (-3)^3 = -27$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \text{ want } 5^3 = 125$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \text{ want } (-1)^3 = -1$$



— Merk op —

- Je kunt van elk reëel getal één derdemachtswortel bepalen.
- De derdemachtswortel van een positief reëel getal is positief.
De derdemachtswortel van een negatief reëel getal is negatief.
- Bij vraagstukken zal je soms jouw eindresultaat moeten afronden op een bepaalde nauwkeurigheid.

$$\sqrt[3]{20} = 2,7144176... \approx 2,71$$



4.3 Benaderen en schatten

Om een wortel uit het hoofd te benaderen, is het zinvol om een aantal rationale wortelvormen uit het hoofd te kennen.

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{64} = 8$$

Op die manier kun je afleiden dat $\sqrt{12}$ tussen 3 en 4 ligt: $\sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$

$$3 < \sqrt{12} < 4$$

Het uit het hoofd kennen van een aantal derdemachtswortels is handig om goede schattingen te kunnen maken.

We noteren er hier een aantal:

$$\sqrt[3]{0} = 0$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\dots$$

Op die manier kun je inschatten dat $\sqrt[3]{9}$ tussen 2 en 3 ligt: $\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{27}$
 $2 < \sqrt[3]{9} < 3$

Bovendien ligt $\sqrt[3]{9}$ eerder in de buurt van 2 dan van 3.



Verwerkingsopdrachten



5, 6

11

Bereken. Noteer jouw antwoord als breuk of decimale vorm.

a) $\sqrt{100}$

$$= 10$$

e) $\sqrt{50}$

$$= 7,071\dots$$

i) $\sqrt{\frac{16}{81}}$

$$= \frac{4}{9}$$

b) $\sqrt[3]{64}$

$$= 4$$

f) $\sqrt{(-29)^2}$

$$= 29$$

j) $-\sqrt{48}$

$$= -6,928\dots$$

c) $-\sqrt{\frac{4}{16}}$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

g) $\sqrt[3]{30}$

$$= 3,107\dots$$

k) $-\sqrt{0,36}$

$$= -0,6$$

d) $-\sqrt{121}$

$$= -11$$

h) $\sqrt[3]{\frac{-200}{25}}$

$$= -2$$

l) $\sqrt[3]{-1}$

$$= -1$$

12

Bepaal de lengte van de zijde ...

a) van een vierkant met oppervlakte 17 cm^2 .

$$z^2 = 17 \text{ cm}^2$$

$$z = \sqrt{17} \text{ cm}$$

$$z \approx 4,12 \text{ cm}$$

De zijde heeft ongeveer een lengte van 4,12 cm.

We nemen enkel de positieve wortel omdat het gaat om een lengte.

b) van een kubus met een volume van 100 cm^3 .

$$z^3 = 100 \text{ cm}^3$$

$$z = \sqrt[3]{100} \text{ cm}$$

$$z \approx 4,64 \text{ cm}$$

De zijde heeft ongeveer een lengte van 4,64 cm.



Signaaloefeningen

1

Bepaal de decimale vorm en verbind met de juiste benaming.

$$\frac{-4}{15} =$$

-0,2666...

$$\sqrt{\frac{1}{9}} =$$

0,333...

$$\frac{19}{8} =$$

2,375

$$-\sqrt{200} =$$

-14,14213562...

eindig decimale vorm

oneindig doorlopende zuiver repeterende decimale vorm

oneindig doorlopende gemengd repeterende decimale vorm

oneindig doorlopende decimale vorm zonder repeterend deel

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D23

2

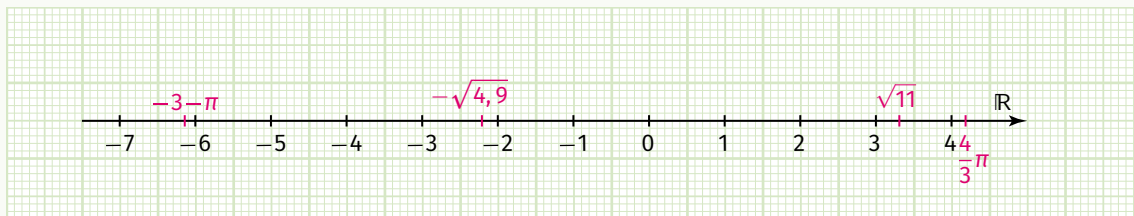
Zet een kruisje in de juiste kolom.

	RATIONAAL GETAL	IRRATIONAAL GETAL	REËEL GETAL
$-\sqrt[3]{125}$	X		X
$-3,56444...$	X		X
π		X	X
$\sqrt{64}$	X		X
$\sqrt{2}$		X	X
$3,151515...$	X		X

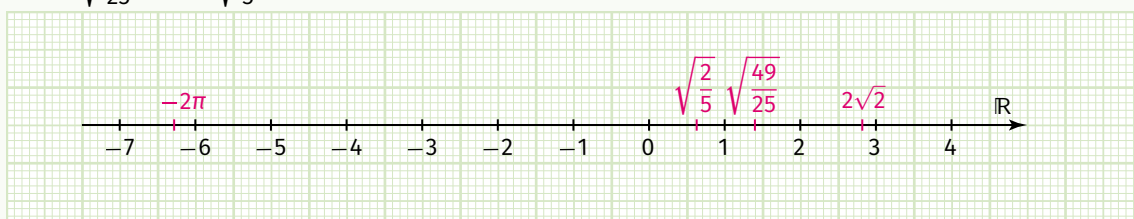
>>> Verder oefenen: D24 t.e.m. D32

3

a) Plaats $-3 - \pi$; $\sqrt{11}$; $-\sqrt{4,9}$; $\frac{4}{3}\pi$ op de juiste plaats op de getallenas. Maak indien nodig gebruik van de decimale vorm.

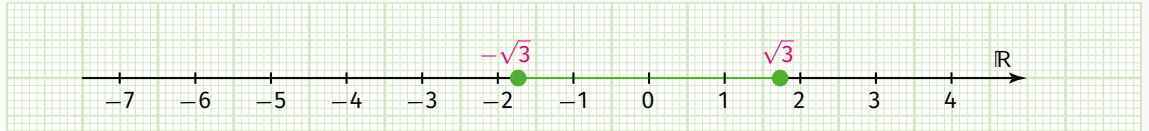


b) Plaats $\sqrt{\frac{49}{25}}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{2}{5}}$ en -2π op de getallenas.



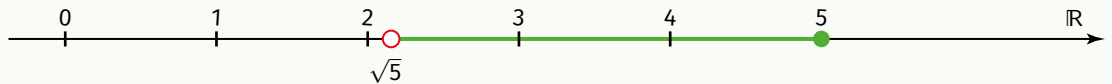
>>> Verder oefenen: D24 t.e.m. D32

4

a) Wat betekent $]0, \pi[$?Alle getallen die groter zijn dan 0 en kleiner dan π .b) Geef $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ weer op de getallenas.c) Noteer $[-\sqrt{11}, +\infty[$ met ongelijkheden.

$$-\sqrt{11} \leq x$$

d) Geef de intervalnotatie die past bij deze voorstelling.



$$[\sqrt{5}, 5]$$

>>> Verder oefenen: D33 t.e.m. D43

5

Bereken de mogelijke reële waarden voor x .

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{50}$$

$$x^2 = 2 \cdot 50$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100} \quad \vee \quad x = -\sqrt{100}$$

$$x = 10 \quad \vee \quad x = -10$$

>>> Verder oefenen: D44 t.e.m. D59

6

Een balk heeft een volume van 2058 cm^3 .
Bereken de hoogte a .



$$3a \cdot 2a \cdot a = 2058 \text{ cm}^3$$

$$6a^3 = 2058 \text{ cm}^3$$

$$a^3 = 343 \text{ cm}^3$$

$$a = \sqrt[3]{343 \text{ cm}^3}$$

$$a = 7 \text{ cm}$$

>>> Verder oefenen: D44 t.e.m. D59



Differentiatietraject

1

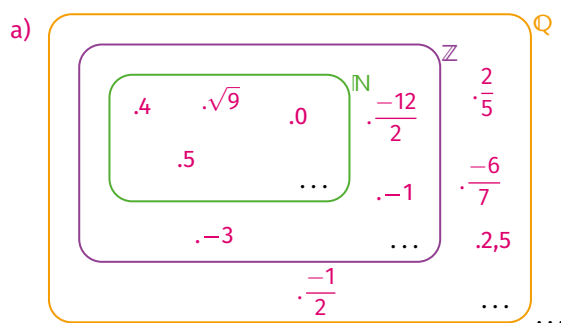
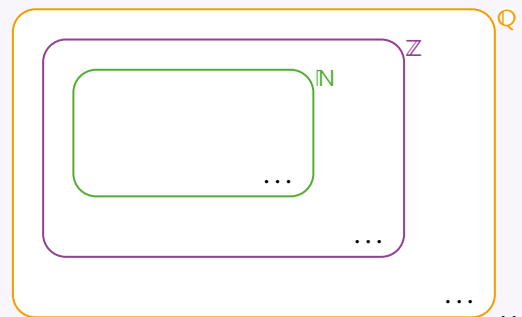
- a) Neem het diagram over en plaats de volgende getallen op de juiste plaats in het diagram.

$$\frac{2}{5}; 4; \frac{-6}{7}; \sqrt{9}; \frac{-12}{2}; -1; 0 \text{ en } 2,5$$

- b) Kies zelf nog een natuurlijk getal en plaats het op de juiste plaats in het diagram.

- c) Kies zelf nog een geheel getal dat geen natuurlijk getal is en plaats het op de juiste plaats in het diagram.

- d) Kies zelf nog een rationaal getal dat geen geheel getal is en plaats het op de juiste plaats in het diagram.



b) bv. 5

c) bv. -3

d) bv. $\frac{-1}{2}$

2

Zet onderstaande breuken om naar hun decimale vorm.

a) $\frac{-7}{10}$

c) $\frac{64}{1000}$

e) $\frac{37}{100}$

b) $\frac{43}{100}$

d) $\frac{-19}{10}$

f) $\frac{999}{1000}$

a) $\frac{-7}{10} = -0,7$

c) $\frac{64}{1000} = 0,064$

e) $\frac{37}{100} = 0,37$

b) $\frac{43}{100} = 0,43$

d) $\frac{-19}{10} = -1,9$

f) $\frac{999}{1000} = 0,999$

3

Verbind de decimale vorm met de juiste breuk.

0,666...	0,5	0,375	0,1	0,8	0,125	1,25	0,25	1,333...	0,75
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

4

Vul aan met $\in$ of $\notin$.

a) $7 \dots \mathbb{N}$

e) $5 \dots \mathbb{Z}$

i) $-\sqrt{5} \dots \mathbb{Q}$

b) $-8 \dots \mathbb{N}$

f) $3,787878\dots \dots \mathbb{Q}$

j) $\sqrt{\frac{64}{49}} \dots \mathbb{Q}$

c) $\frac{3}{4} \dots \mathbb{Z}$

g) $2,86 \dots \mathbb{Z}$

k) $\sqrt{121} \dots \mathbb{N}$

d) $\frac{-4}{5} \dots \mathbb{Q}$

h) $-50 \dots \mathbb{N}$

l) $1,72333\dots \dots \mathbb{Q}$

a) $\in$

e) $\in$

i) $\notin$

b) $\notin$

f) $\in$

j) $\in$

c) $\notin$

g) $\notin$

k) $\in$

d) $\in$

h) $\notin$

l) $\in$

5

Zet onderstaande breuken om naar hun decimale vorm.

a) $\frac{3}{25}$

d) $\frac{-\sqrt{121}}{20}$

g) $-\frac{21}{28}$

b) $\frac{16}{25}$

e) $\frac{-59}{125}$

h) $\frac{13}{18}$

c) $\frac{39}{45}$

f) $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}$

i) $-\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{10\,000}}$

a) $\frac{3}{25} = 0,12$

d) $\frac{-\sqrt{121}}{20} = -0,55$

g) $-\frac{21}{28} = -0,75$

b) $\frac{16}{25} = 0,64$

e) $\frac{-59}{125} = -0,472$

h) $\frac{13}{18} = 0,7222\dots$

c) $\frac{39}{45} = 0,8666\dots$

f) $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = 1,4$

i) $-\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{10\,000}} = -0,13$

6

Verbind de breuken met de juiste decimale vorm.

$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{47}{50}$	$\frac{1}{125}$
0,94	0,008	0,6	0,4	0,625	0,65
60 %	94 %	40 %	65 %	0,8 %	62,5 %



7

Hieronder vind je enkele resultaten van leerlingen voor de toets Nederlands op 22.
Bereken hoeveel procent de leerling behaalde.

- a) Amir behaalt 18/22.
b) Violette behaalt 15/22.
c) Remco behaalt 16,5/22.
d) Saar behaalt 20/22.

a) $\frac{18}{22} = \frac{81,818181...}{100} = 81,818181... \%$
 b) $\frac{15}{22} = \frac{68,181818...}{100} = 68,181818... \%$
 c) $\frac{16,5}{22} = \frac{75}{100} = 75 \%$
 d) $\frac{20}{22} = \frac{90,909090...}{100} = 90,909090... \%$



8

Omkring de zuiver repeterende decimale vormen.

3,35787878...	2,555...	1,2345234234234...	6,74
2,979797...	8,454545...	9,1474747...	0,6777...
0,545454...	3,22	8,989898...	22,4545



9

Noteer de periode van de repeterende decimale vormen.

- a) 7,898989... c) 87,242424... e) -9,456745674567...
 b) -23,566777... d) 2,48480454545... f) 0,00111...

- a) 89 c) 24 e) 4567
 b) 7 d) 45 f) 1



10

Kleur de decimale vorm en de bijhorende breuk in eenzelfde kleur.

$\frac{37}{41}$	6,585858...	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{652}{99}$	$\frac{47}{9}$
-1,666...	5,222...	0,545454...	0,90243902439...	-0,5	$-\frac{5}{3}$



11

- 1) Welke decimale vormen zijn zuiver repeterend?
- 2) Welke decimale vormen zijn gemengd repeterend?
- 3) Welke decimale vormen zijn geen rationale getallen?

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) 0,666... | f) 4,454545... |
| b) -1,0444... | g) 0,866025403... |
| c) 2,819481735... | h) 9,099099099... |
| d) 21,499834559... | i) -10,834834834... |
| e) 5,821343434... | j) 3,141592654... |

- 1) a, f, h, i
- 2) b, e
- 3) c, d, g, j



12

- a) Noteer een oneindig doorlopende decimale vorm die zuiver repeterend is en waarvan de periode 12 is.
- b) Noteer een gemengd repeterende decimale vorm waarvan de periode 5 is.
- c) Noteer een oneindig doorlopende decimale vorm waarvan het niet-repeterend deel 17 is.
- d) Noteer een irrationaal getal kleiner dan $-\pi$.

- a) bv. 1,121212...
- b) bv. 2,3555...
- c) bv. 3,17444...
- d) bv. -3,5497...



13

Julie en Sander willen een nieuw tuinhuis kopen. Het tuinhuis kost € 4450 zonder btw. Vermits het tuinhuis niet aangebouwd wordt aan hun huis moeten ze 21 % btw betalen. Beantwoord de bijhorende vragen.

- a) Schat hoeveel euro btw Julie en Sander moeten betalen.
- b) Hoeveel zullen ze in het totaal moeten betalen voor het tuinhuis?

a) $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
 $\frac{1}{5} \cdot € 4500 = € 900$

Sander en Julie zullen naar schatting € 900 btw moeten betalen.

b) $€ 4450 \cdot 1,21 = € 5384,50$

Sander en Julie zullen in totaal € 5384,50 moeten betalen.



14

Verbind de decimale vorm met de juiste breuk.

-3,555...	-3,454545...	1,232323...	2,3757575...	0,666...
$\frac{122}{99}$	$-\frac{32}{9}$	$-\frac{38}{11}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{392}{165}$



15

Duid de wortelvormen aan die irrationale getallen zijn.

$\sqrt{34}$	$-\sqrt{64}$	$\sqrt{0,81}$	$\sqrt{\frac{16}{8}}$	$\sqrt{0,111...}$	$\sqrt{10}$
$\sqrt{\frac{4}{9}}$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{0,1}$	$\sqrt{1000}$	$-\sqrt{\frac{25}{144}}$	$-\sqrt{1,21}$



16

Drie leerlingen gebruiken elk een andere app om de decimale vorm van $\sqrt{856}$ te bepalen. Elke app toont een verschillend aantal cijfers na de komma. Welke leerling heeft het bij het juiste eind?

Riewke

$$\sqrt{856} \approx 29,2574777$$

 $\sqrt{856}$ is een rationaal getal.

De decimale vorm is gemengd repeterend. De periode is 7.

Janne

$$\sqrt{856} \approx 29,257477676767$$

 $\sqrt{856}$ is een rationaal getal.
De decimale vorm is gemengd repeterend. De periode is 67.

Mauro

$$\sqrt{856} \approx 29,2574776766559$$

 $\sqrt{856}$ is een irrationaal getal.

Het is een oneindig doorlopende decimale vorm zonder repeterend deel.

Mauro heeft het bij het juiste eind.

Een rekenmachine rondt het laatste getal steeds af.

Dus krijgen we bij Riewke: 29,2574776...

Janne: 29,2574776766...

Mauro: 29,25747766558...



17

Eindig decimale vormen kunnen omgezet worden naar een onvereenvoudigbare breuk.

- I) Bekijk aandachtig dit voorbeeld. Formuleer in woorden de verschillende stappen om tot de eindoplossing te komen.

$$-2,4 = \frac{-24}{10} = \frac{-12}{5}$$

$$151,25 = \frac{15125}{100} = \frac{605}{4}$$

- II) Zet de eindig decimale vormen om naar een onvereenvoudigbare breuk.

a) 0,4

c) 3,2

e) 0,33

b) -3,47

d) -5,55

f) 4,75

- III) Voer de instructies uit in het rekenblad op POLPO.

I) STAP 1: Zet de eindig decimale vorm om naar een breuk waarbij de noemer een macht van 10 is. Doe dit zo dat in de teller geen komma voorkomt.

STAP 2: Vereenvoudig de breuk.

II) a) $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

c) $3,2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$

e) $0,33 = \frac{33}{100}$

b) $-3,47 = \frac{-347}{100}$

d) $-5,55 = \frac{-555}{100} = \frac{-111}{20}$

f) $4,75 = \frac{475}{100} = \frac{19}{4}$

III) zie Polpo



18

Zet met behulp van ICT de oneindig doorlopende decimale vormen om naar een breukvorm.

a) 0,151515...

c) 2,454545...

e) 1,252525...

b) 0,56323232...

d) -5,555...

f) 3,030303...

a) $0,151515... = \frac{5}{33}$

c) $2,454545... = \frac{27}{11}$

e) $1,252525... = \frac{124}{99}$

b) $0,56323232... = \frac{1394}{2475}$

d) $-5,555... = \frac{-50}{9}$

f) $3,030303... = \frac{100}{33}$





Er bestaat een algoritme om een oneindig doorlopende decimale vorm met een zuiver repeterend deel om te zetten in een onvereenvoudigbare breuk. Bekijk het stappenplan en de twee voorbeelden.

methode

- STAP 1: Stel de decimale vorm gelijk aan x .
 STAP 2: Vermenigvuldig het getal met een macht van 10, waarbij de exponent van die macht gelijk is aan het aantal cijfers van de periode.
 STAP 3: Bepaal het verschil van het verkregen product met de oorspronkelijke decimale vorm.
 STAP 4: Isoleer de letter x , je verkrijgt een breuk.
 STAP 5: Vereenvoudig indien nodig de verkregen breuk.

Voorbeelden

$$x = 0,181818...$$

$$100x = 18,181818...$$

$$x = 0,181818...$$

$$99x = 18$$

$$x = \frac{18}{99}$$

$$x = \frac{2}{11}$$

$$x = 2,333...$$

$$10x = 23,333...$$

$$x = 2,333...$$

$$9x = 21$$

$$x = \frac{21}{9}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

I) Zet de decimale vormen om naar een breukvorm. Controleer je resultaat met ICT.

a) $1,747474...$

c) $0,323232...$

e) $-5,555...$

b) $0,151515...$

d) $2,454545...$

f) $1,125125125...$

II) Voer de instructies uit in het rekenblad op POLPO.

I) a) $x = 1,747474...$

$$100x = 174,747474...$$

$$x = 1,747474...$$

$$99x = 173$$

$$x = \frac{173}{99}$$

c) $x = 0,323232...$

$$100x = 32,323232...$$

$$x = 0,323232...$$

$$99x = 32$$

$$x = \frac{32}{99}$$

e) $x = -5,555...$

$$10x = -55,555...$$

$$x = -5,555...$$

$$9x = -50$$

$$x = -\frac{50}{9}$$

b) $x = 0,151515...$

$$100x = 15,151515...$$

$$x = 0,151515...$$

$$99x = 15$$

$$x = \frac{15}{99}$$

$$x = \frac{5}{33}$$

d) $x = 2,454545...$

$$100x = 245,454545...$$

$$x = 2,454545...$$

$$99x = 243$$

$$x = \frac{243}{99}$$

$$x = \frac{27}{11}$$

f) $x = 1,125125125...$

$$1000x = 1125,125125125...$$

$$x = 1,125125125...$$

$$999x = 1124$$

$$x = \frac{1124}{999}$$

II) zie Polpo





- I) Er bestaat een algoritme om een oneindig doorlopende decimale vorm met een gemengd repeterend deel om te zetten in een onvereenvoudigbare breuk. Bekijk aandachtig dit voorbeeld. Formuleer in woorden de verschillende stappen om tot de eindoplossing te komen.

Voorbeelden

$ \begin{array}{rcl} x & = & 0,3121212... \\ 1000x & = & 312,121212... \\ 10x & = & 3,121212... \\ \hline 990x & = & 309 \\ x & = & \frac{309}{990} \\ x & = & \frac{103}{330} \end{array} $	$ \begin{array}{rcl} x & = & 4,126888... \\ 10\,000x & = & 41\,268,888... \\ 1000x & = & 4\,126,888... \\ \hline 9000x & = & 37\,142 \\ x & = & \frac{37\,142}{9000} \\ x & = & \frac{18\,571}{4500} \end{array} $
--	--

- II) Zet de decimale vormen om naar een breukvorm. Controleer je resultaat met ICT.

- | | | |
|------------------|-----------------|------------------|
| a) 3,68111... | c) 2,9454545... | e) -3,2343434... |
| b) 0,56323232... | d) -5,8555... | f) 0,16777... |

- III) Voer de instructies uit in het rekenblad op POLPO.

- I) STAP 1: Stel de decimale vorm gelijk aan x .
 STAP 2: Vermenigvuldig het getal met een macht van 10, waarbij de exponent van die macht gelijk is aan de som van het aantal cijfers in het niet-repeterend deel en het aantal cijfers in de periode.
 STAP 3: Vermenigvuldig het getal met een macht van 10, waarbij de exponent van die macht gelijk is aan het aantal cijfers van het niet-repeterend deel.
 STAP 4: Bepaal het verschil van beide verkregen producten.
 STAP 5: Isoleer de letter x , je verkrijgt een breuk.
 STAP 6: Vereenvoudig indien nodig de verkregen breuk.

II) a) $x = 3,68111...$ $ \begin{array}{rcl} 1000x & = & 3681,111... \\ 100x & = & 368,111... \\ \hline 900x & = & 3313 \\ x & = & \frac{3313}{900} \end{array} $	c) $x = 2,9454545...$ $ \begin{array}{rcl} 1000x & = & 2945,454545... \\ 10x & = & 29,454545... \\ \hline 990x & = & 2916 \\ x & = & \frac{2916}{990} \\ x & = & \frac{162}{55} \end{array} $	e) $x = -3,2343434...$ $ \begin{array}{rcl} 1000x & = & -3234,343434... \\ 10x & = & -32,343434... \\ \hline 990x & = & -3202 \\ x & = & \frac{-3202}{990} \\ x & = & \frac{-1601}{495} \end{array} $
b) $x = 0,56323232...$ $ \begin{array}{rcl} 10\,000x & = & 5632,323232... \\ 100x & = & 56,323232... \\ \hline 9900x & = & 5576 \\ x & = & \frac{5576}{9900} \\ x & = & \frac{1394}{2475} \end{array} $	d) $x = -5,8555...$ $ \begin{array}{rcl} 100x & = & -585,555... \\ 10x & = & -58,555... \\ \hline 90x & = & -527 \\ x & = & \frac{-527}{90} \end{array} $	f) $x = 0,16777...$ $ \begin{array}{rcl} 1000x & = & 167,777... \\ 100x & = & 16,777... \\ \hline 900x & = & 151 \\ x & = & \frac{151}{900} \end{array} $

- III) zie Polpo



21

Hoeveel procent kans heb je om met 2 dobbelstenen een 4 en een 5 te gooien?



$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0,0555... = 5,555... \%$$

Je hebt ongeveer 5,56 % kans om een 3 en een 5 te gooien met 2 dobbelstenen.



22

Toon aan dat $0,999... = 1$ door de decimale vorm in breuk te schrijven.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0,999... \\ 10x & = & 9,999... \\ - & & x = 0,999... \\ \hline 9x & = & 9 \\ x & = & \frac{9}{9} \\ x & = & 1 \end{array}$$



23

Doorheen de jaren werden er technieken bedacht om irrationale getallen te benaderen tot op een bepaalde nauwkeurigheid.

a) Er zijn wiskundigen die π benaderen met een breuk.

$$\pi \approx \frac{22}{7}$$

$$\pi \approx \frac{3927}{1250}$$

$$\pi \approx \frac{355}{113}$$

Welke breuk heeft de beste benadering?

b) De Chinese wiskundige Liu Hui benaderde π als volgt:

$$\pi \approx 768 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 1}}}}}}}}}$$

Op hoeveel cijfers na de komma is deze benadering correct?

a) $\frac{22}{7} = 3,142857142...$

$$\frac{3927}{1250} = 3,1416$$

$$\frac{355}{113} = 3,141592920...$$

$$\pi = 3,141592653...$$

$$\pi \approx \frac{355}{113} \text{ is de beste benadering}$$

b) $\underline{3,141590463...}$

$$\pi = \underline{3,141592653...}$$

Antwoord: Hij was op 0,00001 nauwkeurig.



24

Benader het reëel getal op de gevraagde nauwkeurigheid.

- a) $\sqrt{2}$ op 0,01 nauwkeurig
 b) π op 0,00001 nauwkeurig
 c) $-\sqrt{15}$ op 0,1 nauwkeurig
 d) $\sqrt{\frac{7}{4}}$ op 0,001 nauwkeurig

a) $\sqrt{2} \approx 1,41$

b) $\pi \approx 3,14159$

c) $-\sqrt{15} \approx -3,9$

d) $\sqrt{\frac{7}{4}} \approx 1,323$

25

Vul aan met < of >.

- a) $\sqrt{7} \dots 3$
 b) $-2 \dots -\sqrt{10}$
 c) $\sqrt{8} \dots 2,8$
 d) $\frac{22}{7} \dots \pi$
 e) $0,666 \dots 0,666\dots$
 f) $-\sqrt{12} \dots -\pi$

a) $\sqrt{7} < 3$

b) $-2 > -\sqrt{10}$

c) $\sqrt{8} > 2,8$

d) $\frac{22}{7} > \pi$

e) $0,666 < 0,666\dots$

f) $-\sqrt{12} < -\pi$

26

Rangschik van groot naar klein.

- a) $\frac{12}{5}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{90}{16}}$ en 2,6
 b) $-7,333$; $-\sqrt{53}$; $\frac{-29}{4}$; $-7,333\dots$ en $-\sqrt{\frac{225}{4}}$

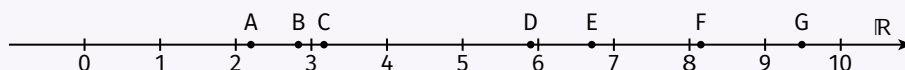
a) $2,6 > \frac{12}{5} > \sqrt{\frac{90}{16}} > \sqrt{5}$

b) $\frac{-29}{4} > -\sqrt{53} > -7,333 > -7,333\dots > -\sqrt{\frac{225}{4}}$

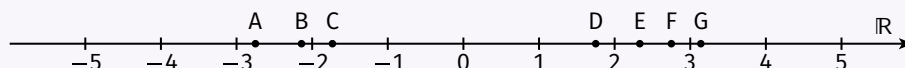
27

Plaats op de getallenas. Gebruik indien nodig de decimale vorm.

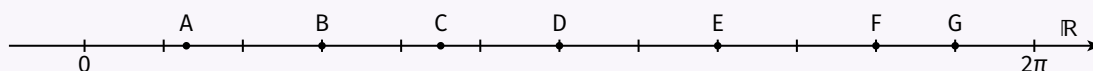
a) $\sqrt{10}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{90}$; $3\sqrt{5}$



b) $\frac{7}{3}$; $-\sqrt{3}$; π ; $-2,141414\dots$



c) π ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$



a) $\sqrt{10} = C$

$2\sqrt{2} = B$

$\sqrt{90} = G$

$3\sqrt{5} = E$

b) $\frac{7}{3} = E$

$-\sqrt{3} = C$

$\pi = G$

$-2,141414\dots = B$

c) $\pi = D$

$\frac{\pi}{2} = B$

$\frac{3}{4}\pi = C$

$\frac{5}{3}\pi = F$



28

Schrijf in symbolentaal.

a) π is een positief reëel getal.b) $\sqrt{11}$ is geen rationaal getal.

c) Een reëel getal is rationaal of irrationaal.

d) $0,12345\dots$ is een irrationaal getal.

a) $\pi \in \mathbb{R}^+$

b) $\sqrt{11} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

c) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

d) $0,12345\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

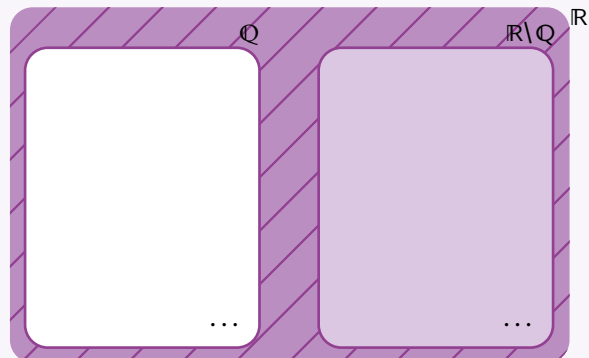


29

De verzameling van de irrationale getallen kunnen we niet aanduiden met één symbool. Als je meerdere symbolen gebruikt, lukt het wel. De verzameling van de irrationale getallen bevat alle reële getallen die geen rationale getallen zijn. We noteren dit zo: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Je leest dit als 'R verschil Q'.

Vul aan met $\in$ of $\notin$.

- | | |
|---|--|
| a) $-3,454545 \dots \mathbb{Q}$ | g) $0 \dots \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ |
| b) $1,25 \dots \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ | h) $\sqrt{144} \dots \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ |
| c) $-\sqrt{19} \dots \mathbb{R}$ | i) $0,010010001\dots \mathbb{Q}$ |
| d) $3,820184 \dots \mathbb{Q}$ | j) $-12,34555 \dots \mathbb{Q}$ |
| e) $\pi \dots \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ | k) $3 - \pi \dots \mathbb{R}$ |
| f) $-\sqrt{\frac{4}{25}} \dots \mathbb{R}$ | l) $\frac{15}{17} \dots \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ |



- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a) $\in$ | e) $\in$ | i) $\notin$ |
| b) $\notin$ | f) $\in$ | j) $\in$ |
| c) $\in$ | g) $\notin$ | k) $\in$ |
| d) $\in$ | h) $\notin$ | l) $\notin$ |



30

Zijn de uitspraken waar of niet waar?

- | | |
|---|---|
| a) Alle gehele getallen zijn ook rationaal. | e) Alle rationale getallen zijn ook gehele getallen. |
| b) Elk geheel getal is ook een natuurlijk getal. | f) Elk reëel getal is een rationaal getal. |
| c) Er bestaan rationale getallen die niet reëel zijn. | g) Er bestaan reële getallen die niet irrationaal zijn. |
| d) Alle irrationale getallen zijn ook natuurlijke getallen. | h) Elk geheel getal is ook een reëel getal. |

- | | |
|--------------|--------------|
| a) waar | e) niet waar |
| b) niet waar | f) niet waar |
| c) niet waar | g) waar |
| d) niet waar | h) waar |



Stap 1: We tonen aan dat de lengte van de diagonaal bij een vierkant met zijde 1 gelijk is aan $\sqrt{2}$.

- Teken een vierkant met een zijde van 1 cm.
- Hoe groot is de oppervlakte van dat vierkant?
- Teken een diagonaal van dat vierkant en stel de lengte gelijk aan x .
- Noteer de oppervlakte van het vierkant door gebruik te maken van de formule voor de oppervlakte van een ruit.
De ruit heeft dezelfde diagonalen als het vierkant.
- Stel de oppervlakte uit vraag d gelijk aan de oppervlakte uit vraag b en isoleer x .



Zoek op in het vademecum

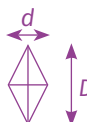
- oppervlakte vierkant

$$A_{\text{vierkant}} = z^2$$



- oppervlakte ruit

$$A_{\text{ruit}} = \frac{D \cdot d}{2}$$



Stap 2:

- Teken een getallenas waarbij 1 eenheid 1 cm is.
- Pas de lengte van de diagonaal af op de getallenas.

Stap 1:



d) $A_{\text{ruit}} = \frac{D \cdot d}{2}$

e) $\frac{x^2}{2} = 1$

b) 1 cm^2

$$A = \frac{x \cdot x}{2}$$

$$x^2 = 1 \cdot 2$$

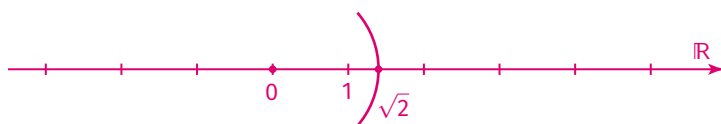


$$A = \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

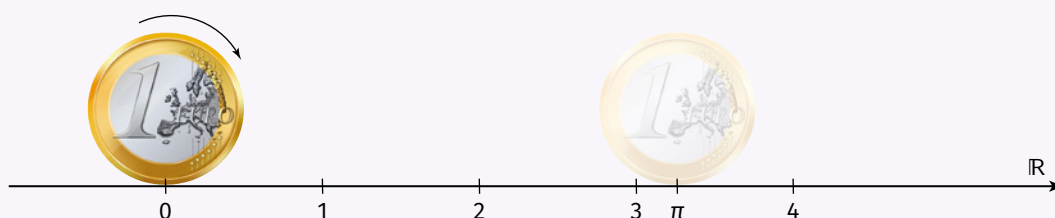
Stap 2:



32

Constructie van π op de getallenas

- Teken een getallenas. Neem een muntstuk van 1 euro en breng een ijk aan op de as. 1 eenheid is gelijk aan de diameter van je euromuntstuk.
- Plaats het euromuntstuk op 0 zoals in de tekening en rol het muntstuk precies 1 keer rond. Plaats een streepje op de positie op de getallenas waar je stopte.
- Verklaar waarom π daar op de getallenas ligt.



c) $p_{\text{cirkel}} = 2 \cdot r \cdot \pi$

Als je het muntstuk 1x omwentelt, heb je π keer de diameter afgelegd.



33

Vul aan met het juiste begrip.

Gegeven: $[3, 2\pi[$

3 is de ... van het interval. Het linkse vierkante haakje is ... 3 ... tot het interval.

2π is de ... van het interval. Het rechtse vierkante haakje is ... 2π ... tot het interval.

Als we het interval noteren met ... , dan noteren we: $3 \leq x < 2\pi$.

Stellen we het interval voor op de getallenas, dan krijgen we onderstaand resultaat.



3 is de **ondergrens** van het interval. Het linkse vierkante haakje is **gesloten**. 3 **behoort** tot het interval.

2π is de **bovengrens** van het interval. Het rechtse vierkante haakje is **open**. 2π **behoort niet** tot het interval.

Als we het interval noteren met **symbolen**, dan noteren we: $3 \leq x < 2\pi$.



34

Kleur alle intervallen waar het reëel getal toe behoort.

a) $\sqrt{3}$	$[\sqrt{3}, 4]$	$] -\sqrt{2}, \sqrt{5}]$	$] -\infty, \sqrt{3}[$	$[0, 2]$
b) $\frac{-\sqrt{8}}{3}$	$] -1, 1[$	$[-2, +\infty[$	$[-\sqrt{8}, -\sqrt{3}]$	$]\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}]$
c) π	$] -\infty, \pi[$	$[3, \pi]$	$[0, 3]$	$[\pi, +\infty[$
d) 4,501819428 ...	$[\sqrt{17}, \sqrt{24}[$	$]4,5; 4,6[$	$[\sqrt{30}, +\infty[$	$]\frac{14}{3}, 5[$



35

Waar of niet waar? Zet een kruisje in het juiste vakje.

	WAAR	NIET WAAR
-8 behoort tot het interval $[-13, -3]$	X	
π behoort tot het interval $]3,5; 7]$		X
5^6 behoort tot het interval $[25, +\infty[$	X	
15,38 behoort tot het interval $[15,2; 15,4[$	X	



36

Geef de betekenis van de volgende notaties in woorden.

- a) $\sqrt{15} \in [2, 4]$
- b) $-\sqrt{5} < x \leq -1$
- c) $x > \sqrt{37}$
- d) $[-5, 5[$
- e) $] -\infty, \sqrt{11}]$

- a) $\sqrt{15}$ behoort tot het interval $[2, 4]$
- b) Alle reële getallen groter dan $-\sqrt{5}$ en kleiner dan of gelijk aan -1
- c) Alle reële getallen groter dan $\sqrt{37}$
- d) Alle reële getallen groter dan of gelijk aan -5 en kleiner dan 5
- e) Alle reële getallen kleiner dan of gelijk aan $\sqrt{11}$



37

Noteer als een interval.

- a) Alle reële getallen tussen $-4,5$ en 5
- b) Alle reële getallen die kleiner dan of gelijk zijn aan 15 en groter zijn dan 4
- c) Alle reële getallen kleiner dan 9
- d) Alle reële getallen groter dan of gelijk aan $-\sqrt{2}$ en kleiner dan of gelijk aan 13
- e) $-3 \leq x \leq 58$
- f) $-\sqrt{3} \leq x < \pi$
- g) $\sqrt{2} < x < 19$

a) $] -4,5; 5 [$

b) $] 4, 15]$

c) $] -\infty, 9 [$

d) $[-\sqrt{2}, 13]$

e) $[-3, 58]$

f) $[-\sqrt{3}, \pi [$

g) $] \sqrt{2}, 19 [$



38

Noteer de volgende intervallen met behulp van een ongelijkheid.

- a) $[3, 15]$
- b) $[-8, 14[$
- c) $] -\infty, 23]$
- d) $] -\pi, +\infty[$
- e) $[8,3; 13,9]$

a) $3 \leq x \leq 15$

b) $-8 \leq x < 14$

c) $x \leq 23$

d) $x > -\pi$

e) $8,3 \leq x \leq 13,9$



39

Zet de onderstaande omschrijvingen om naar de notatie met ongelijkheden.

- Alle reële getallen die groter dan of gelijk zijn aan -2 en kleiner zijn dan 8
- Alle reële getallen die groter zijn dan 3 en kleiner dan of gelijk zijn aan 7
- Alle reële getallen die kleiner dan of gelijk zijn aan 14
- Alle reële getallen die groter dan of gelijk zijn aan -1 en kleiner dan of gelijk zijn aan 5

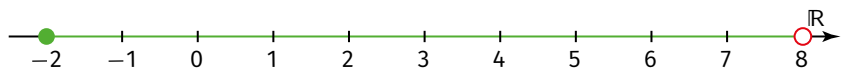
- $-2 \leq x < 8$
- $3 < x \leq 7$
- $x \leq 14$
- $-1 \leq x \leq 5$



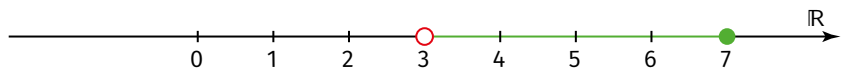
40

- Noteer voor de omschrijvingen uit de vorige oefening de intervalnotatie.
- Geef van elke omschrijving ook de voorstelling op de getallenas.

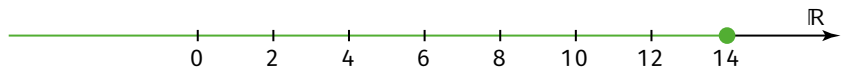
a) $[-2, 8[$



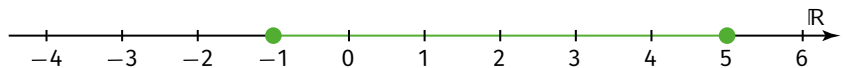
b) $]3, 7]$



c) $] -\infty, 14]$



d) $[-1, 5]$



41

Zet de onderstaande omschrijvingen om naar de notatie met ongelijkheden.

- Alle reële getallen die groter zijn dan 5
- Alle reële getallen die kleiner dan of gelijk zijn aan 20
- Alle reële getallen die groter dan of gelijk zijn aan $\sqrt{3}$
- Alle reële getallen die kleiner zijn dan 0

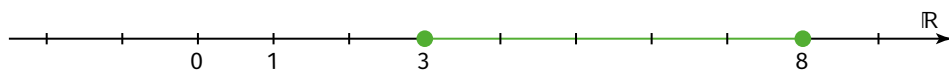
- $x > 5$
- $x \leq 20$
- $x \geq \sqrt{3}$
- $x < 0$



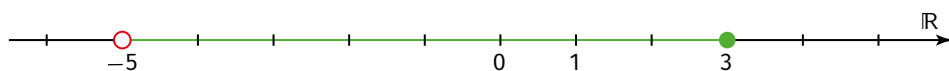
42

Stel volgende intervallen voor op een getallenas.

a) $[3, 8]$



b) $] -5, 3]$



c) $[-2, 7[$



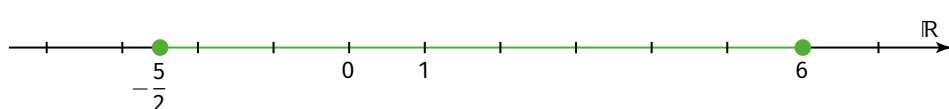
d) $] -7, -1[$



e) $] -4, 6]$



f) $\left[-\frac{5}{2}, 6\right]$



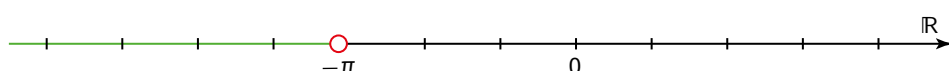
43

Stel volgende intervallen of ongelijkheden voor op een getallenas.

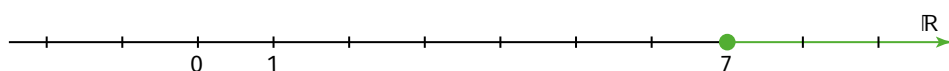
a) $] -\infty, 3]$



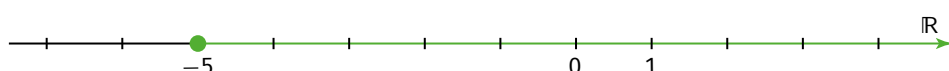
b) $x < -\pi$



c) $[7, +\infty[$



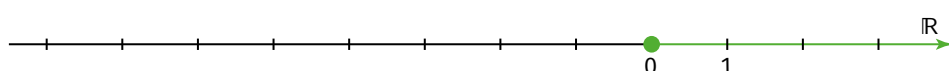
d) $x \geq -5$



e) $-6 \leq x$



f) $[0, +\infty[$



44

Bereken uit het hoofd.

a) $\sqrt{4}$

e) $\sqrt{49}$

i) $\sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt[3]{1}$

f) $\sqrt{25}$

j) $\sqrt{9}$

c) $\sqrt{81}$

g) $\sqrt[3]{27}$

k) $\sqrt{16}$

d) $\sqrt{36}$

h) $\sqrt{64}$

l) $\sqrt{100}$

a) $\sqrt{4} = 2$

e) $\sqrt{49} = 7$

i) $\sqrt[3]{8} = 2$

b) $\sqrt[3]{1} = 1$

f) $\sqrt{25} = 5$

j) $\sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt{81} = 9$

g) $\sqrt[3]{27} = 3$

k) $\sqrt{16} = 4$

d) $\sqrt{36} = 6$

h) $\sqrt{64} = 8$

l) $\sqrt{100} = 10$

45

Bereken uit het hoofd.

a) $-\sqrt{81}$

e) $\sqrt[3]{-1}$

i) $\sqrt[3]{-8}$

b) $\sqrt[3]{64}$

f) $\sqrt{144}$

j) $\sqrt{256}$

c) $\sqrt{121}$

g) $\sqrt[3]{1000}$

k) $-\sqrt{169}$

d) $\sqrt[3]{-27}$

h) $\sqrt{400}$

l) $\sqrt[3]{125}$

a) $-\sqrt{81} = -9$

e) $\sqrt[3]{-1} = -1$

i) $\sqrt[3]{-8} = -2$

b) $\sqrt[3]{64} = 4$

f) $\sqrt{144} = 12$

j) $\sqrt{256} = 16$

c) $\sqrt{121} = 11$

g) $\sqrt[3]{1000} = 10$

k) $-\sqrt{169} = -13$

d) $\sqrt[3]{-27} = -3$

h) $\sqrt{400} = 20$

l) $\sqrt[3]{125} = 5$

46

Bereken met behulp van je rekenmachine. Rond je resultaat af op 0,0001 nauwkeurig.

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{10}$

b) $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{92}$

c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{35}$

d) $\sqrt[3]{150} + \sqrt[3]{81}$

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{10} \approx 4,1544$

b) $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{92} \approx 7,6892$

c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{35} \approx 13,2711$

d) $\sqrt[3]{150} + \sqrt[3]{81} \approx 9,6400$

47

Bereken.

a) $\sqrt{0,01}$

e) $\sqrt{0,0009}$

i) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

b) $\sqrt{\frac{36}{49}}$

f) $\sqrt{\frac{25}{9}}$

j) $\sqrt{1,69}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

g) $\sqrt[3]{0,008}$

k) $\sqrt{0,81}$

d) $\sqrt{4,41^2}$

h) $\sqrt[3]{27}$

l) $\sqrt{\frac{100}{9}}$

a) $\sqrt{0,01} = 0,1$

e) $\sqrt{0,0009} = 0,03$

i) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$

b) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$

f) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

j) $\sqrt{1,69} = 1,3$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

g) $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$

k) $\sqrt{0,81} = 0,9$

d) $\sqrt{4,41^2} = 4,41$

h) $\sqrt[3]{27} = 3$

l) $\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$



48

Bereken indien mogelijk de reële waarden van x.

a) $x^2 = 100$

c) $x^2 = 64$

e) $x^2 = 47$

b) $x^2 = -1$

d) $x^2 = -49$

f) $x^2 = \frac{1}{36}$

a) $x^2 = 100$
 $x = \sqrt{100}$ of $x = -\sqrt{100}$
 $x = 10$ of $x = -10$

d) $x^2 = -49$
 heeft geen oplossing

b) $x^2 = -1$
 heeft geen oplossing

e) $x^2 = 47$
 $x = \sqrt{47}$ of $x = -\sqrt{47}$

c) $x^2 = 64$
 $x = \sqrt{64}$ of $x = -\sqrt{64}$
 $x = 8$ of $x = -8$

f) $x^2 = \frac{1}{36}$
 $x = \sqrt{\frac{1}{36}}$ of $x = -\sqrt{\frac{1}{36}}$
 $x = \frac{1}{6}$ of $x = -\frac{1}{6}$



49

Vul aan. Links noteer je het geheel getal dat net kleiner is, rechts noteer je het geheel getal dat net groter is.

a) $\dots < \sqrt{5} < \dots$

c) $\dots < \sqrt{14} < \dots$

e) $\dots < -\sqrt{21} < \dots$

b) $\dots < -\sqrt{10} < \dots$

d) $\dots < \sqrt{89} < \dots$

f) $\dots < \sqrt{61} < \dots$

a) $2 < \sqrt{5} < 3$

c) $3 < \sqrt{14} < 4$

e) $-5 < -\sqrt{21} < -4$

b) $-4 < -\sqrt{10} < -3$

d) $9 < \sqrt{89} < 10$

f) $7 < \sqrt{61} < 8$



50

Schat de decimale vorm.

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{35}$

c) $\sqrt{105}$

a) $\sqrt{12}$ ligt tussen $\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{16} = 4$, vermits $\sqrt{12}$ ongeveer in het midden ligt tussen $\sqrt{9}$ en $\sqrt{16}$ is mijn schatting 3,5.

$$\sqrt{12} \approx 3,5$$

b) $\sqrt{35}$ ligt tussen $\sqrt{25} = 5$ en $\sqrt{36} = 6$, vermits $\sqrt{35}$ net kleiner is dan $\sqrt{36}$ is mijn schatting 5,9.

$$\sqrt{35} \approx 5,9$$

c) $\sqrt{105}$ ligt tussen $\sqrt{100} = 10$ en $\sqrt{121} = 11$, vermits $\sqrt{105}$ net groter is dan $\sqrt{100}$ is mijn schatting 10,2.

$$\sqrt{105} \approx 10,2$$



51

a) Bereken de lengte van de zijde van een vierkant met een oppervlakte van 19 cm^2 . Rond je resultaat af op 0,01 cm nauwkeurig.

b) Een cirkel heeft een oppervlakte van 30 cm^2 . Hoe lang is de straal van deze cirkel? Rond je resultaat af op 1 mm nauwkeurig.

$$\begin{aligned} a) \quad z^2 &= 19 \\ z &= \sqrt{19} \\ z &\approx 4,36 \end{aligned}$$

We nemen enkel de positieve wortel omdat het gaat om een lengte.

Antwoord:

De lengte van de zijde is ongeveer 4,36 cm.

$$\begin{aligned} b) \quad \pi \cdot r^2 &= 30 \\ r^2 &= \frac{30}{\pi} \\ r &= \sqrt{\frac{30}{\pi}} \\ r &\approx 3,1 \end{aligned}$$

We nemen enkel de positieve wortel omdat het gaat om een lengte.

Antwoord:

De straal is ongeveer 31 mm.



52

a) Bereken de lengte van de zijde voor een kubus met een volume van 15 cm^3 . Rond je resultaat af op 0,01 cm nauwkeurig.

b) De formule om het volume van een bol te berekenen is $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Bereken de lengte van de straal voor een bol met een volume van 8 cm^3 . Rond je resultaat af op 1 mm nauwkeurig.

$$\begin{aligned} a) \quad z^3 &= 15 \\ z &= \sqrt[3]{15} \\ z &\approx 2,47 \end{aligned}$$

Antwoord:

De lengte van de zijde is ongeveer 2,47 cm.

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 &= 8 \\ r^3 &= \frac{8 \cdot 3}{4\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \\ r &\approx 1,2 \end{aligned}$$

Antwoord:

De straal van de bol is ongeveer 12 mm.



53

Bereken indien mogelijk de middelevenredigen.

a) $\frac{27}{x} = \frac{x}{3}$

c) $\frac{-3}{x} = \frac{x}{8}$

e) $\frac{-10}{x} = \frac{x}{-4}$

b) $\frac{14}{x} = \frac{x}{4}$

d) $\frac{5}{x} = \frac{x}{2}$

f) $\frac{5}{x} = \frac{x}{7}$

a) $\frac{27}{x} = \frac{x}{3}$

$x^2 = 27 \cdot 3$

$x^2 = 81$

$x = 9 \vee x = -9$

d) $\frac{5}{x} = \frac{x}{2}$

$x^2 = 5 \cdot 2$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$

b) $\frac{14}{x} = \frac{x}{4}$

$x^2 = 14 \cdot 4$

$x^2 = 56$

$x = \sqrt{56} \vee x = -\sqrt{56}$

e) $\frac{-10}{x} = \frac{x}{-4}$

$x^2 = -10 \cdot (-4)$

$x^2 = 40$

$x = \sqrt{40} \vee x = -\sqrt{40}$

c) $\frac{-3}{x} = \frac{x}{8}$

$x^2 = -24$

heeft geen oplossing

f) $\frac{5}{x} = \frac{x}{7}$

$x^2 = 5 \cdot 7$

$x^2 = 35$

$x = \sqrt{35} \vee x = -\sqrt{35}$



54

Hoe lang is de zijde van een vierkant als de oppervlakte van het vierkant even groot is als de oppervlakte van een cirkel met straal 7 cm? Rond je resultaat af op 1 mm nauwkeurig.

$A_{\text{vierkant}} = z^2$

$A_{\text{cirkel}} = r^2 \cdot \pi$

$z^2 = r^2 \cdot \pi$

wordt: $z^2 = 7^2 \cdot \pi$

$z^2 = 49\pi$

$z = \sqrt{49\pi}$

$z \approx 12,4$

We nemen enkel de positieve wortel omdat het gaat om een lengte.

Antwoord: De zijde van het vierkant is ongeveer 124 mm.



55

Om de waarde van π te berekenen, benaderde Archimedes eerst de vierkantswortel van een positief geheel getal x . Hij stelde vast dat $\frac{265}{153} < \sqrt{x} < \frac{1351}{780}$.

a) Van welk positief geheel getal benaderde Archimedes eerst de vierkantswortel?

b) Hoe nauwkeurig is deze benadering?

a) $1,732026143... < \sqrt{x} < 1,732051282...$

$\sqrt{3} \approx 1,732051$

$x = 3$

Antwoord: Hij benaderde de vierkantswortel van 3.

b) Deze benadering was op 0,0001 nauwkeurig.



56

Voor hoeveel waarden van x is $\sqrt{x}$ irrationaal als x een natuurlijk getal is kleiner dan 1000?

$\sqrt{x}$ is irrationaal als x geen volkomen kwadraat is.

$x \in \mathbb{N}$ en $\sqrt{x}$ is irrationaal $\Rightarrow x$ is geen volkomen kwadraat

$x \in \mathbb{N}$ en $\sqrt{x}$ is rationaal $\Rightarrow x$ is een volkomen kwadraat

$\sqrt{1000} \approx 31,6227766... \Rightarrow 31^2 < 1000$

Hieruit volgt dat $x \in \mathbb{N}$ en $\sqrt{x}$ is rationaal $\Rightarrow \sqrt{x} \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 30, 31\}$

$\Rightarrow 32$ getallen kleiner dan 1000 zijn volkomen kwadraten.

$\Rightarrow$ Voor 32 getallen kleiner dan 1000 is $\sqrt{x}$ rationaal.

$\Rightarrow$ Voor $1000 - 32 = 968$ getallen kleiner dan 1000 is $\sqrt{x}$ irrationaal.

Antwoord: Voor 968 waarden van x is $\sqrt{x}$ irrationaal.

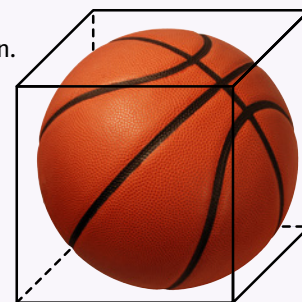


57

In de NBA worden er basketballen toegelaten die een omtrek van 74,9 cm hebben.

Een fabrikant maakt een kubusvormige verpakking voor deze basketballen.

Hoe lang moet de zijde van zo'n kubusvormige verpakking minstens zijn om de basketbal te kunnen verpakken? Rond jouw antwoord af op 1 mm nauwkeurig.



TIP De omtrek van een bal wordt gemeten op de grootste mogelijke cirkelvormige doorsnede.

$$2 \cdot r \cdot \pi = 74,9$$

$$2r = \frac{74,9}{\pi}$$

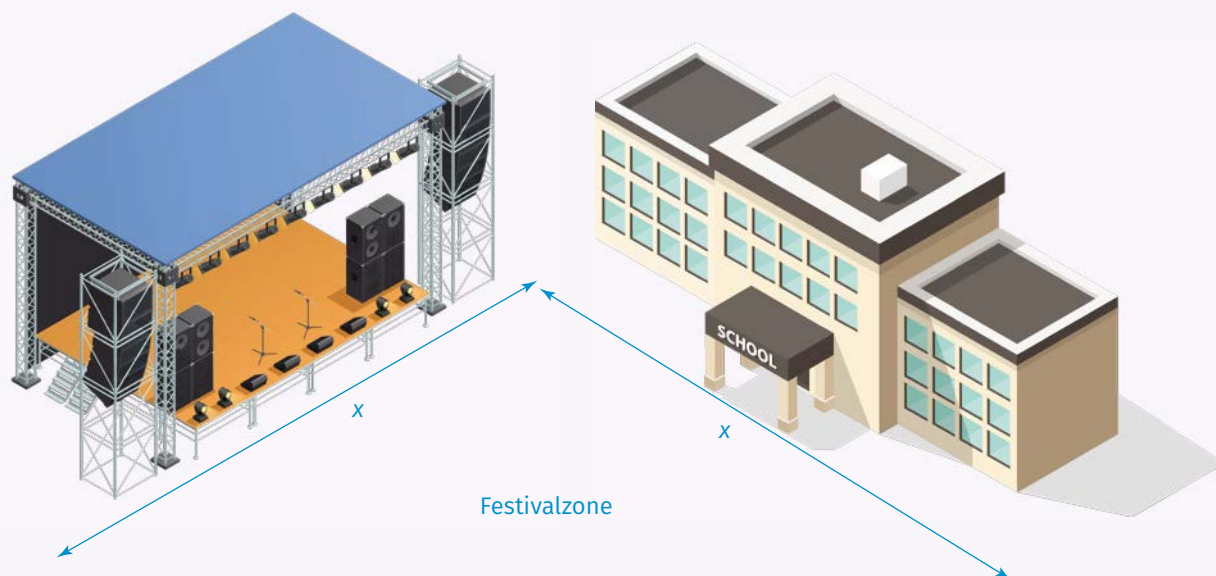
$$2r \approx 23,84$$

Antwoord: De zijde van de verpakking moet minstens 239 mm zijn.



58

Op school organiseert het leerlingenparlement een vrij podium. De vierkante zone waarin de leerlingen kunnen kijken naar de optredens wordt afgespannen met een lint. Het terrein heeft een oppervlakte van 410 m^2 . De school beschikt over 60 m lint. Kan de volledige zone afgespannen worden met dit lint?



$$x^2 = 410$$

$$x = \sqrt{410}$$

$$x \approx 20,25$$

We nemen enkel de positieve wortel omdat het gaat om een lengte.

$$2 \cdot 20,25 \text{ m} = 40,5 \text{ m}$$

Antwoord: De volledige zone kan niet afgespannen worden, maar er is wel voldoende lint om de 2 open zijden af te spannen.



59



De geluidssnelheid in lucht bij een gegeven temperatuur kan benaderd worden met de formule

$$v = 331,3 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273,15}}. \text{ Hierbij is } v \text{ de snelheid in m/s en } T \text{ de temperatuur in } ^\circ\text{C}.$$

- Hoe verandert de geluidssnelheid bij 5°C ten opzichte van 25°C ?
- Bij welke temperatuur is de geluidssnelheid $331,3 \text{ m/s}$?
- Voor welke waarden van T kun je de geluidssnelheid berekenen? Geef een verklaring.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad v_5 &= 331,3 \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{273,15}} \\ &\approx 334,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_{25} &= 331,3 \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{273,15}} \\ &\approx 346,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 346,1 - 334,3 &= 11,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Antwoord: De geluidssnelheid neemt met ongeveer $11,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ toe.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 331,3 &= 331,3 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273,15}} \\ \left(\frac{331,3}{331,3}\right)^2 &= \left(\sqrt{1 + \frac{T}{273,15}}\right)^2 \\ 1 &= 1 + \frac{T}{273,15} \\ 0 &= \frac{T}{273,15} \\ 0 &= T \end{aligned}$$

Antwoord: Bij een temperatuur van 0°C is de geluidssnelheid $331,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Voor alle waarden waarbij $T \geq -273,15^\circ\text{C}$.

Als $T < -273,15^\circ\text{C}$ dan moet de vierkantswortel genomen worden van een negatief getal en dit is onmogelijk.



